引文格式:董箭,王栋,唐露露,等.自适应弹性椭圆海洋划界算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2026,51(11):2275-2286.DOI:10.13203/j.whugis20260302

Citation:DONG Jian,WANG Dong,TANG Lulu,et al.Adaptive Elastic Ellipse Algorithm for Maritime Delimitation[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2026,51(11):2275-2286.DOI:10.13203/j.whugis20260302

自适应弹性椭圆海洋划界算法

董 箭[1] 王 栋[1] 唐露露[1] 马梦锴[1] 谢 天[1] 赵 巍[2]

1 海军大连舰艇学院,辽宁 大连,116018

2 92493部队,辽宁 葫芦岛,125000

摘 要:针对参考椭球面离散双边界划界中传统弹性圆算法迭代中心(暂停点)稀疏、搜索方向适应性不足及折线离散性较大的问题,提出了自适应弹性椭圆海洋划界算法。利用当前暂停点到两侧边界基点集合的最短大地距离确定辅助椭圆长半轴,以压缩比控制短半轴,根据两侧关联最近基点的有向连线更新长轴方向,在半椭圆范围内定向搜索,并以有界误差圆启发式局部搜索处理超限候选点。实验结果表明,所提方法相较传统弹性圆算法平均偏距和最大偏距分别降低36.82%和19.57%,平均弦偏差降低62.51%,单点平均耗时相较距离等比例线法由25.21 s降至0.80 s。此外,该方法本身具备良好的几何基础,存在几何偏距与计算代价之间的较好折中,且4类适用性场景均正常运行完成。

关键词:海洋划界;弹性椭圆;误差圆搜索;大地主题解算;距离等比例线

中图分类号:P229 **文献标识码**:A **收稿日期**:2026-08-06

DOI:10.13203/j.whugis20260302 **文章编号**:1671-8860(2026)11-2275-12

Adaptive Elastic Ellipse Algorithm for Maritime Delimitation

DONG Jian[1] *WANG Dong*[1] *TANG Lulu*[1] *MA Mengkai*[1] *XIE Tian*[1] *ZHAO Wei*[2]

1 Dalian Naval Academy,Dalian 116018,China

2 Troops 92493,Huludao 125000,China

Abstract: **Objectives**: To improve bilateral maritime delimitation on a reference ellipsoid when the two boundaries are represented by discrete nodes, an adaptive elastic-ellipse algorithm is developed to address sparse iteration centers, insufficient directional adaptation, and large polyline approximation errors in conventional elastic-circle processing. **Methods**: The minimum geodesic distance from the current iteration center to each boundary-node set determines the semi-major axis of an auxiliary ellipse, while a compression ratio controls its semi-minor axis. The major-axis direction is updated from the directed segment joining the associated nearest nodes on the two boundaries. Candidate points are searched directionally along a half ellipse, and a bounded error-circle heuristic local search is invoked when the distance-ratio residual exceeds the prescribed tolerance. Comparative, compression-ratio sensitivity, and multi-scenario experiments are conducted. **Results**: In the main experiment, the proposed method generated 200 iteration centers in 160.82 s. Compared with the conventional elastic-circle method, it reduced the mean and maximum offsets by 36.82% and 19.57%, respectively, and reduced the mean chordal deviation by 62.51%. Compared with the distance-ratio line method, the average runtime per iteration center decreased from 25.21 s to 0.80 s. When the compression ratio increased from 1 to 8, the number of iteration centers increased from 14 to 808 and the total runtime from 19.80 s to 576.96 s. Four tested scenarios, including regular, wide-water, complex-boundary, and non-equal-ratio cases, all completed successfully. **Conclusions**: The proposed directional elliptical search improves candidate coverage and polyline approximation for the tested discrete bilateral-boundary conditions. The compression ratio provides a practical means of controlling point density and com-

基金项目:国家自然科学基金(42071439)。

第一作者:董箭,博士,教授,主要从事海图制图理论、国家海洋权益方面的研究。navydj@163.com

通信作者:王栋,博士生。navywd@163.com

putational cost, whereas its effect on geometric accuracy is scenario dependent.

Key words: maritime delimitation; elastic ellipse; error-circle search; geodetic computation; distance-ratio line

海洋划界是将国际海洋法原则转化为可计算空间界线的关键技术过程，是明确沿海国领海、毗连区、专属经济区和大陆架等海域权利范围的基础。划界结果以基点、基线、权益区域和地理坐标等要素进行表达，直接服务于海洋资源开发、海上活动管理和国家战略规划。《联合国海洋法公约》确立了相邻或相向国家间划界的基本法律框架，国际海道测量组织与国际大地测量协会编制的《联合国海洋法公约技术问题手册》进一步规范了基线、大地基准和海洋界线计算等技术问题[1-2]。美国、加拿大、澳大利亚等国家在海洋划界研究上起步较早，经历了由投影平面构线向参考椭球面解析计算、由局部作图向自动化空间分析的发展。文献[3]提出椭球面两点法和三点法，利用基线点的大地坐标求取等距离线转折点，如图1所示的三点法双边划界实例[4]。文献[5-7]围绕全局边界划定、水线法和自动化划界开展，使连续岸线信息能够参与中间线生成。文献[8]解决了两条或多条岸线间等距离边界的无歧义确定问题。文献[9]提出了基于Voronoi剖分方法构建海域和中间线自动划定流程，并将矢量Voronoi计算扩展到地球椭球面[10]。文献[11]提出的高精度椭球面大地线算法为距离、方位和交点计算提供了稳健的数值基础。

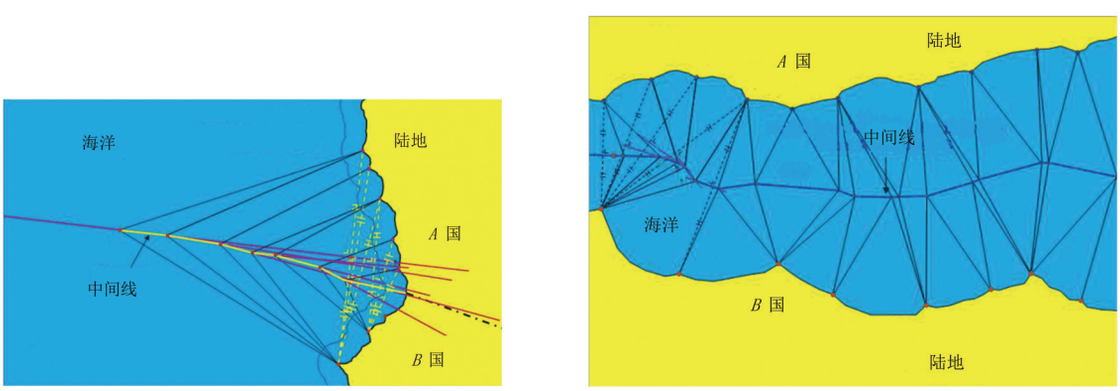


图1 三点法双边界线生成实例[4]

Fig. 1 Example of Bilateral Maritime Delimitation Using Three-Point Algorithm[4]

中国同样在《联合国海洋法公约》等国际法框架下，从法理基础、质量评估、技术实现等多个方向对划界问题展开了广泛且大量的研究，且更加侧重于国家决策、权益维护和权益拓展等问题。文献[12]在中间线法的基础上提出了适用面更广的距离等比率线法，文献[13]提出的划界辅助决策系统基于大地椭球面实现了相关方法在划界模型界面的可视化处理，文献[14]通过研究椭球面海域界线生成算法推动划界计算摆脱投影平面限制。随后，文献[15]建立了高精度距离等比例线模型，文献[16]则通过缓冲区边界相向逼近求交实现复杂曲线间中心线自动提取，实现了公平原则下的高精度复杂双边海洋划界，文献[17]进一步融合水线法与弹性圆算法，以弹性圆算法的高效性优势改善了传统方法的效率问题。此外，文献[18]比较多类等距离划界模型，提出了地球椭球面上的距离等比例统一方法[19]和两点间距离等比例线生成方法[20]，文献[21]中将界线优化目标拓展到大陆架公式外部界线生成，文献[22]从海平面上升情景强调了海洋界线划定的内在复杂性，从法律和技术角度提供了宝贵的见解。相关研究表明，国内技术重点已由平面划界作业转向椭球面统一建模、自动计算和多情景适用性分析。图2给出了水线法及缓冲区边界相向逼近求交模型[4]。

综上所述，国内外研究已形成参考椭球面建模、高精度大地线计算和界线自动生成的技术基础，但对空间一致性、计算效率与界线走向适应性的协同兼顾仍显不足。三点法、Voronoi法和距离等比例线法具有较强的几何约束能力，但在复杂边界条件下可能产生较多转折点或候选点；水线法和弹性圆算法便于自动生成，但传统弹性圆算法的迭代步长受两侧边界间距控制，宽阔海域中迭代中心较稀疏，全圆扫描和反复角度细分也会增加计算量。现有改进方法对迭代中心密度、搜索方向和误差收敛机制的协同控制仍有提

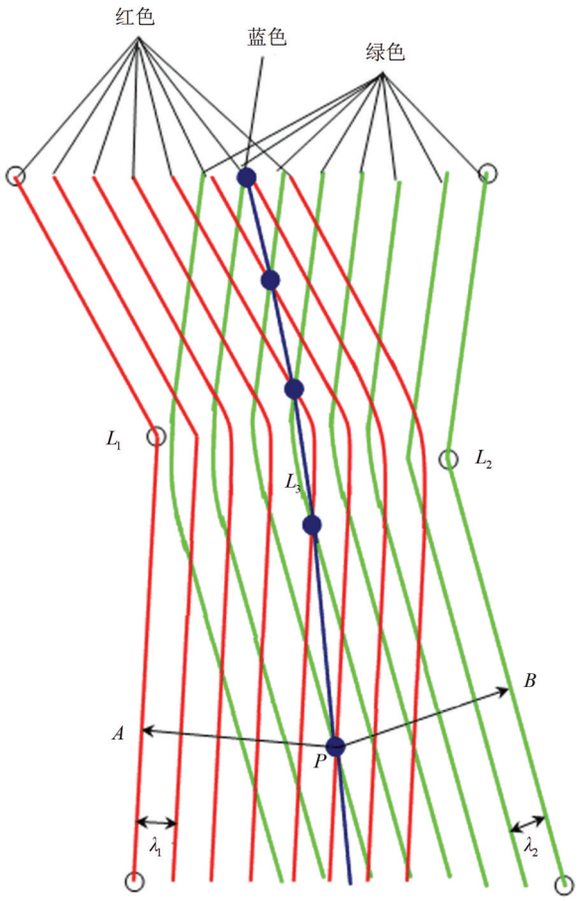


图 2　缓冲区边界相向逼近求交模型示意图[4]

Fig. 2　Diagrams of Opposing Buffer-Boundary Approximation-and-Intersection Model[4]

升空间。

针对上述不足,本文提出了自适应弹性椭圆海洋划界算法,以可调压缩比控制短半轴,利用候选点在两侧边界上的关联最近基点连线动态更新长轴方向,将候选扫描限制在定向半椭圆,并在比例约束残差超出阈值时构造误差圆进行有界局部搜索,以改善离散点密度控制、搜索方向约束和复杂场景下的计算稳定性。

1　基于弹性圆算法的双边界线生成方法分析

传统双边划界方法是建立在地图投影平面基础上的,但由于地球曲率的影响,由地球椭球面转换到地图投影的过程中必然会出现相当程度的投影变形,进而原有的双边界线生成模型失准。为此,本文在参考椭球面上构建并分析弹性圆双边划界模型,依次说明模型原理、大地主题正反解及传统算法的局限性。

1.1　传统算法基本原理

1.1.1　基于弹性圆算法的双边界线生成方法

作为一种应用广泛且处理高效的双边划界方法,弹性圆算法的本质是一种几何学与计算机技术耦合的划界中间线生成方法。从连续几何模型来看,其核心原理可以概括为在双边界线之间构建辅助圆,使圆心到两侧边界的距离满足给定比例约束,收集滚动过程中辅助圆圆心的连线作为等比例线。该方法的理论基础是双边界之间满足给定距离比例约束的等距离或等比例线构造,可与文献[3,12,15]所述的等距离或等比例线模型相联系。本文将文献[17]作为传统弹性圆算法的直接方法来源,其原理示意图如图 3 所示。

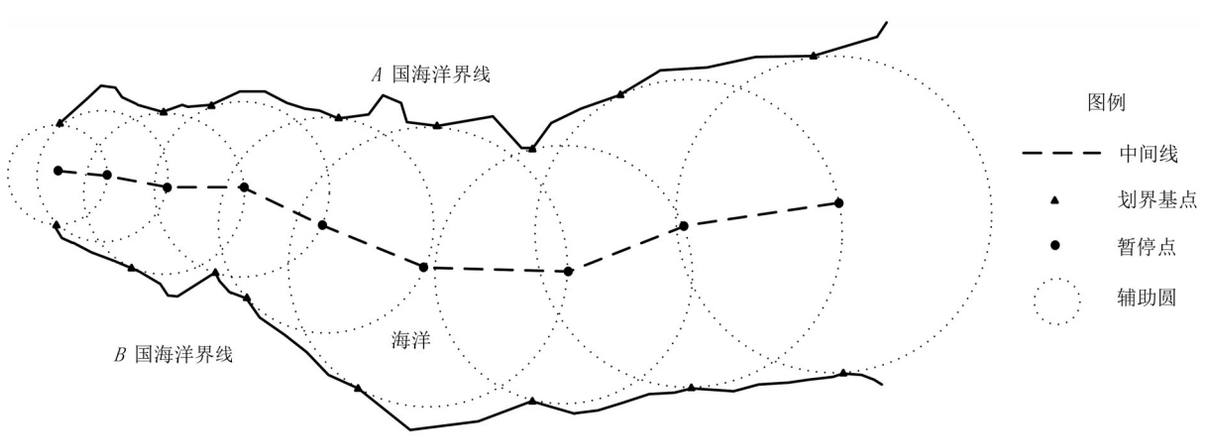


图 3　弹性圆算法原理示意图

Fig. 3　Diagram of Elastic Circle Method

但在实际应用场景下,海洋界线往往是由划界基点的连线构成的,且在计算机中难以实现弹性圆上连续的几何式遍历。因此,为避免连续边界模型与离散基点模型混用,本文统一采用离散基点集合 $A=\{A_i,i=1,2,\cdots\}$、$B=\{B_j,j=1,2,\cdots\}$ 作为距离对象。设两国海洋界线分别为折线 C_A

和C_B,在给定距离比例系数$k\in(0,1)$的条件下,对任意候选点P,定义$d_A(P)=s_{\min}(P,A_i)$、$d_B(P)=s_{\min}(P,B_j)$。其中,$s(\ ,\ )$为参考椭球面上两点间的大地距离;$d_A(P)$和$d_B(P)$分别表示迭代中心(暂停点)P到边界线C_A和C_B的基点集合中的最短距离,目标集合为满足$(1-k)d_A(P)-kd_B(P)=0$的点集。图3中的边界折线仅用于表达对应基点示意位置及离散边界的运动形态。在此基础上,对于一般的目标比例系数k,设边界A的首点坐标为A_0,边界B的首点坐标为B_0,则首、末暂停点到对应边界首点坐标的距离为$ks(A_0,B_0)$。其中,$s(A_0,B_0)$为A_0到B_0的大地距离,且当$k=1/2$时,初始化点取两侧对应起始或终止点连线的中点。除特别说明外,主实验及常规对比采用$k=1/2$;适用性实验中单独采用$k=1/3$检验非对称比例情形。$k=1/2$时,对应端点连线中点仅作为首、末位置的初始化规则。以首初始化点为弹性圆圆心,以一定的角度步长遍历当前弹性圆的360°采样候选点,计算每一候选点的比例约束残差V_{AB}:

$$V_{AB}=\left|d_A(P)-k\left[d_A(P)+d_B(P)\right]\right| \tag{1}$$

取圆上全部候选点的比例约束残差V_{AB}中的最小值,若符合预先设定的误差阈值要求,则以最小值所对应的圆上候选点为新的暂停点,即下一个弹性圆的轨迹圆心;若超出误差阈值,则在最小值所对应的圆上候选点的附近通过细分角度提高精度,直至找到符合要求的弹性圆暂停点。每找到一个新的暂停点,视为完成弹性圆算法的一个循环,不断迭代逼近末暂停点,从而实现弹性圆在双边界线之间的滚动效果。设当前弹性圆的圆心(暂停点)为P_i,弹性圆半径为r_i,末暂停点为M,则弹性圆算法的终止条件为:

$$\begin{cases} s(P_i,M)<r_i \\ r_i=\min\left(d_A(P_i),d_B(P_i)\right) \end{cases} \tag{2}$$

1.1.2 大地主题正反解算

在双边划界问题上,计算的根本在于地球椭球面上的坐标点与坐标点之间的距离和方位的求解。因此,大地主题解算作为椭球面大地测量学的技术基础,其解算精度直接决定了双边划界模型中等距离线的构建精度。

设起点坐标为(B_1,L_1),终点坐标为(B_2,L_2),两点之间的大地线长度为S,起点与终点之间的正反方位角分别为α_1、α_2,则大地主题正解的过程可概括为由起始点坐标、大地线长和正方位角求解终点坐标和反方位角的过程,计算公式为:

$$(B_1,L_1,S,\alpha_1)\xrightarrow{\text{正解}}(B_2,L_2,\alpha_2) \tag{3}$$

大地主题反解的过程可概括为由起始点坐标和终点坐标求解大地线长和正反方位角的过程,计算公式为:

$$(B_1,L_1,B_2,L_2)\xrightarrow{\text{反解}}(S,\alpha_1,\alpha_2) \tag{4}$$

海洋划界涉及距离、方位和坐标的计算需要稳定的大地主题解算方法。结合本文计算流程,底层实现采用嵌套系数法完成大地主题正解,采用贝塞尔法完成大地主题反解。由此可得耦合高精度大地主题解算的双边界线生成模型,在每一次涉及距离方位的迭代计算的过程中,先调用嵌套系数大地主题正解算法遍历辅助圆上候选暂停点,再以椭球面大地主题反解计算候选点与关联最近基点之间的大地距离,并用于求解实际比例约束残差函数式(1)。循环迭代,最终实现高精度双边划界距离等比例线的生成。

1.2 传统算法局限性分析

综合椭球面上的弹性圆算法分析,传统算法虽然可以实现双边界线的等比例线自动提取,但在划界精度、运行效率、地理适应性等层面仍有较大的改进空间:(1)传统算法在迭代过程中采取以暂停点到双边界线距离的最小值作为新弹性圆半径的循环逻辑(如式(2)),导致该算法在双边界线间距过大区域的精度难以控制,进而致使总体算法的划界精度不够。(2)传统算法在迭代过程中无法定义等比例线的延伸方向,需要遍历当前弹性圆的360°采样候选点,以确定新弹性圆的圆心,这种全圆周扫描的方式限制了效率提高。(3)传统算法对于超出误差阈值的圆周遍历结果,采取不断细分角度寻求最优解的方式,搜索方式过于机械化,存在角度细分效率失控的可能性。

因此,针对传统弹性圆算法中计算精度不足的问题,本文提出了弹性圆算法的改进思路:通过设置可控短半轴调节相邻暂停点的典型尺度与输出密度;针对传统弹性圆算法中计算效率和特殊划界情况下的适用性问题,提出主轴方向自适应的定向椭圆半圆扫描思路,通过定义与划界线走向相适应的主轴方向,缩短暂停点搜索过程;针对角度细分可能导致搜索过程无解的问题,以误差圆驱动的有界局部搜索替代无界角度细分,并设置最大搜索层数、最大试探半径和最小残差改进量等停滞控制条件。

综上所述,本文提出了一种主轴方向自适应

的弹性椭圆算法,并耦合误差圆驱动的有界局部搜索机制,重点考察离散点密度、候选方向控制和暂停点搜索方式对划界结果的影响。

2　自适应弹性椭圆海洋划界算法技术分解

为改善传统弹性圆算法在离散双边界条件下暂停点密度较低、候选方向缺少约束以及局部细分过程可能增长等问题,本文提出的自适应弹性椭圆海洋划界算法从弹性椭圆参数化模型、主轴方向自适应更新机制以及误差圆启发式搜索方式3个方面进行了改进。

2.1　弹性椭圆参数化模型

弹性圆算法以当前暂停点到两侧基点集合的最小距离为下一轮搜索尺度,因而边界间距较大时,相邻暂停点可能较疏,进而造成了弹性圆算法在椭球面远距离双边划界情景下的精度较低,故不难推论出通过缩小辅助圆半径、增加暂停点数量、控制搜索尺度的方式来提高划界精度的结论。然而,改变弹性圆算法中辅助圆半径将直接影响辅助圆在双边界线中的覆盖区域,进而可能出现暂停点位置失准的情况。

因此,考虑到改进方案需要在不改变比例约束目标的前提下分别调节候选域两个方向的尺度,本文采用弹性椭圆作为候选搜索轨迹。辅助椭圆以传统弹性圆半径 r_i 为长半轴,以 r_i/q 为短半轴($q>1$)。与直接将圆半径整体缩小相比,该构造在长轴方向保留较大的候选覆盖范围,并通过短轴压缩细化近似推进方向的搜索尺度。长轴严格指两侧关联最近基点的连线方向,而在近似平行的规则走廊中,界线推进方向更接近短轴方向。需要说明的是,该设计不改变比例约束的求解目标,弹性椭圆的独立作用属于方向性候选域设计。

$$\begin{cases} a = r_i \\ b = r_i/q \end{cases} \tag{5}$$

式中,a 和 b 分别为辅助椭圆的长半轴和短半轴;q 为长短半轴比,可视为辅助椭圆短半轴相对于长半轴的压缩比,即 $q=a/b>1$。当 $q=1$ 时,辅助椭圆等效于辅助圆。以辅助椭圆的长半轴作为主轴方向,由椭圆的极径公式可得:

$$r(\theta)=\frac{ab}{\sqrt{(a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}} \tag{6}$$

式中,$r(\theta)$ 为辅助椭圆上一点到当前暂停点的距离;θ 为辅助椭圆上一点方位角与辅助椭圆主轴方位角之差。需注意的是,使用极径公式本质上是将其用于构造测地极坐标意义下的候选搜索轨迹,该方式与椭球面大地主题正解结合后得到的是准椭圆曲线,并非严格定义的椭球面椭圆。

由此参照弹性圆算法,在确定首暂停点位置后,借由椭圆的极径公式和高精度的大地主题正解可以遍历当前辅助椭圆的180°范围内采样候选点。若当前候选点首先满足比例约束残差阈值,则立即将其作为下一暂停点并停止本次半椭圆后续搜索,迭代循环实现双边界线划定的中间线生成,弹性椭圆算法的外层椭圆迭代的末端终止条件应调整为:

$$\begin{cases} s(P_i,M)<r_i/q \\ r_i=\min\left(d_A(P_i),d_B(P_i)\right) \end{cases} \tag{7}$$

辅助椭圆的加入既可以完整覆盖双边界线之间的权益区域,还可以通过调节弹性椭圆算法中压缩比的大小改变短轴尺度和暂停点密度。除此之外,弹性椭圆算法保留原本弹性圆算法中中间暂停点向外延拓距离与实际双边界线间距相关的设定,同样可以实现任意双边划界场景下中间线的自动化生成。需注意的是,本文算法的适用范围限定在给定参考椭球、两侧离散基点集合和比例系数 k,且两侧边界在目标区间内不相交并保持正间隙。

进一步地,由于结果还受双边界线形态、划界尺度和离散点间距等因素的影响,通过 q 调节压缩比增大未必带来划界精度的单调提升。

此外,为区分辅助椭圆形状与单纯减小辅助圆半径的作用,设缩小弹性圆的半径为 r_i/q,令其与辅助椭圆具有相同的短半轴。由式(5)、式(6)可知,方位角为 θ 时辅助椭圆的极径为:

$$r(\theta)=\frac{r_i/q}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{q^2}-1\right)\cos^2\theta}} \tag{8}$$

因而对任意方向均有 $r(\theta)>r_i/q$,且在轴方向达到 r_i。换言之,相对于半径与其短半轴相同的缩小弹性圆,弹性椭圆主要在长轴方向保留更大的候选覆盖范围,其局部搜索的包络面积约为缩小弹性圆的 q 倍。

2.2　主轴方向自适应更新机制

随着短轴缩小,输出暂停点数量通常会增加,因而总计算量可能随点密度上升。将每轮候选扫描范围由传统全圆的360°限制为定向顺时针

遍历的半椭圆的180°,其直接作用是减少单轮角度候选范围,以降低本算法在迭代循环中的计算成本。然而,由于划界方向的不确定性,直接调整辅助椭圆上采样候选点的遍历范围可能会造成双边界线之间区域覆盖不完整,进而致使弹性椭圆算法暂停点无解的情况出现。因此,确定每个辅助椭圆的主轴方向是弹性椭圆算法的必然要求,其核心思想是下一代辅助椭圆的主轴方向不再固定或随意设定,而是由当前最佳暂停点与两条海岸线的几何关系动态决定。

设椭球面下高精度大地主题反解中方位角计算函数为$R(X,Y)$,表示从点X指向点Y的正向方位角。如图4所示,a_0、b_0、b_1等分别为各自海洋界线上的划界基点,直接连接两条界线的同方向划界起点,通过计算a_0到b_0的方位角$\theta_1=R(P_{a_0},P_{b_0})$和$a_0$到$b_1$的方位角$\theta_2=R(P_{a_0},P_{b_1})$,可以计算出方位线$a_0b_0$到方位线$a_0b_1$的相对方位$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$;然后将$\Delta\theta$归一化到$[0,2\pi)$,即当$\Delta\theta<0$时加上$2\pi$,若达到$2\pi$则归一化为0。

假设辅助椭圆的主轴方位角为α,而辅助椭圆上暂停点的搜索区域为椭圆半圆,为保证辅助椭圆的延伸方向与双边界线的划界方向相一致,令σ为首个辅助椭圆确定的方向标志。当$0\leqslant\Delta\theta<\pi$时,取$\sigma=AB$,辅助椭圆的主轴方向应由$a_0$指向$b_0$,此时首辅助椭圆的主轴方位角为$\alpha=R(P_{a_0},P_{b_0})$;当$\pi\leqslant\Delta\theta<2\pi$时,取$\sigma=BA$,辅助椭圆的主轴方向应由$b_0$指向$a_0$,此时首辅助椭圆的主轴方位角为$\alpha=R(P_{b_0},P_{a_0})$。

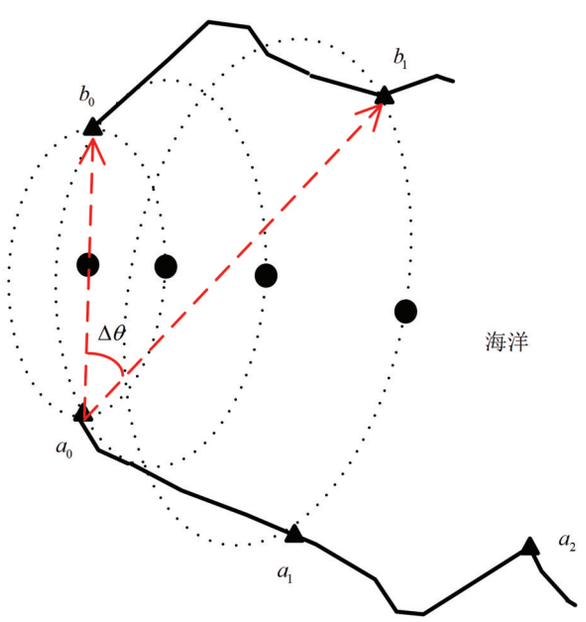


图4 双边划界方向确定方式

Fig. 4 Determination of Bilateral Delimitation Direction

在确定首辅助椭圆的主轴方位角之后,依据弹性圆算法的逻辑迭代构建弹性椭圆寻找划界暂停点,而下一代辅助椭圆的主轴方向由上一代辅助椭圆上的最佳暂停点所关联的两侧边界最近基点的连线决定。如图5所示,射线l、m分别是第$n+1$个辅助椭圆的长、短半轴方向线,a、b是第n个辅助椭圆上的最佳暂停点所关联的两侧边界最近基点,记为$P_{a_n}^{\text{nearest}}$和$P_{b_n}^{\text{nearest}}$,那么第$n+1$个辅助椭圆的主轴方向为$R(P_{b_n}^{\text{nearest}},P_{a_n}^{\text{nearest}})$。由此可得弹性椭圆的主轴方向动态更新公式为:

$$\alpha_{n+1}=\begin{cases}R(P_{a_n}^{\text{nearest}},P_{b_n}^{\text{nearest}}),\sigma=AB\\R(P_{b_n}^{\text{nearest}},P_{a_n}^{\text{nearest}}),\sigma=BA\end{cases}\tag{9}$$

式中,α_{n+1}表示第$n+1$个辅助椭圆的有向主轴方位角;σ为首个辅助椭圆确定并在后续迭代中保持不变的方向标志;$P_{a_n}^{\text{nearest}}$和$P_{b_n}^{\text{nearest}}$分别为第n个暂停点在两侧边界上关联的最近基点。

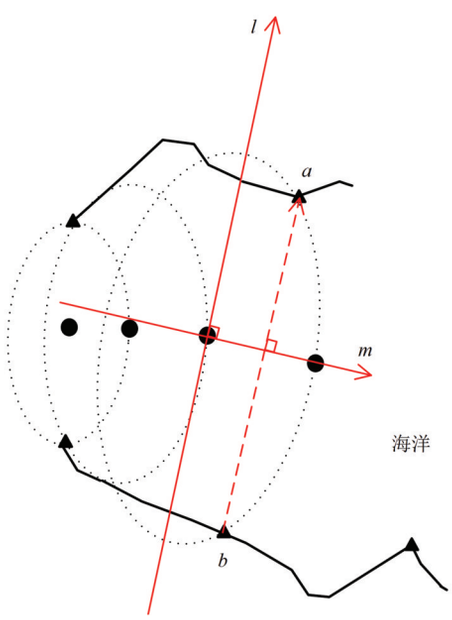


图5 辅助椭圆主轴方向更新

Fig. 5 Updating Major-Axis Direction of Auxiliary Ellipse

在上述方向约定下,规则近似平行走廊中满足比例约束的候选点通常位于短轴端附近,其理论推进尺度为$O(b)=O(r_i/q)$。但由于候选极角、r_i的逐步变化、最近基点切换、误差圆修正及路径弯曲都会改变最终步长,实际相邻暂停点距离不要求严格等于b。

综上,主轴方向自适应与半椭圆扫描的作用是为候选域提供随局部双边几何关系变化的定向约束,并减少单轮角度搜索范围,短轴压缩则主要调节了近似推进尺度和暂停点生成密度。弹性椭圆算法的原理示意图如图6所示。

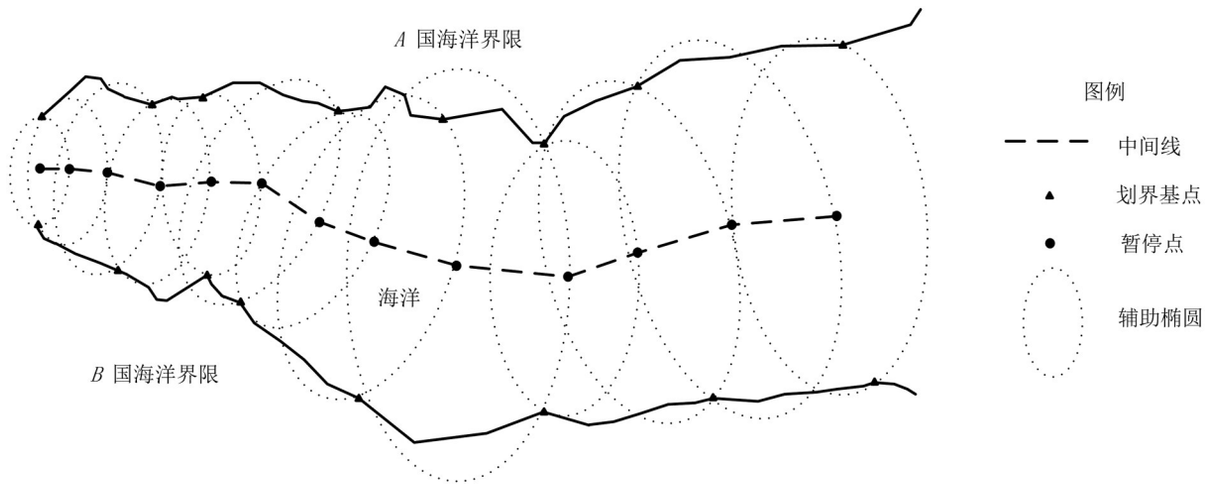


图 6　弹性椭圆算法原理示意图

Fig. 6　Diagram of Elastic Ellipse Method

2.3　误差圆启发式搜索方式

传统弹性圆算法在确定最佳暂停点时,引入比例约束残差函数来验证搜索出的暂停点是否符合误差阈值要求,当超出误差阈值时,则在误差最小值所对应的圆上候选点的附近通过细分角度的方式进一步搜索。该方式的具体实现方案是:原有辅助圆上采样候选点的遍历角度间隔为1°,在得到当前误差最小的圆上候选点后,先在上下范围的1°内细分为20等分,即每一等分对应辅助圆圆心角0.05°,然后再进行更精细的遍历,寻找最佳暂停点。倘若仍不满足误差阈值要求,则同理进行更小角度的依次遍历迭代,直至找到符合要求的点。

上述方法依赖逐级角度细分,未显式利用距离差的数值信息。在候选区形态复杂时,搜索次数和计算过程容易受初始角度分辨率影响。因此,本文采用误差圆启发式局部搜索方式。以辅助椭圆上距离差最小的候选点为圆心、以当前距离差为半径构造误差圆,按1°间隔搜索圆周;若仍不满足阈值,则更新圆心和半径并继续搜索。若误差圆局部搜索未产生规定的残差改进,则保留已获得的历史最优候选点,并受最大搜索层数、最大试探半径和最小残差改进量等限制后终止当前搜索。

如图7所示,对于方法中长半轴方向为l、短半轴方向为m的辅助椭圆,椭圆圆心为o,寻找椭圆上一点o_1为比例约束残差函数的最小值点且不满足误差阈值要求。遂以o_1为误差圆圆心,以比例约束残差函数的最小值为半径,遍历误差圆上360°的候选点求解新的比例约束残差函数,若仍不符合阈值要求,则构建新的误差小圆,且更新半径为当前比例约束残差函数的最小值,迭代循环直至求解最佳暂停点。半径更新公式为:

$$r_{n+1}=\min V_{AB}(r_n) \tag{10}$$

式中,r_n为第n个误差小圆的半径;r_{n+1}为第$n+1$个误差小圆的半径;V_{AB}为比例约束残差函数。

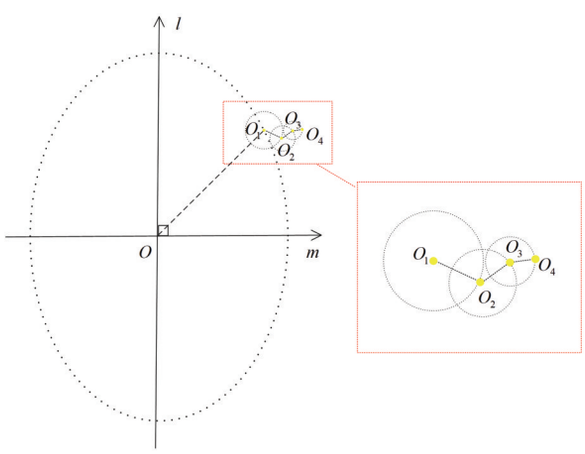


图 7　误差圆启发式搜索原理示意图

Fig. 7　Diagram of Error-Circle Heuristic Searching

为保证搜索过程有界,设置最大搜索层数、最大试探半径和最小残差改进量,以用于控制搜索过程并保留已获得的最优候选点,负责误差圆局部搜索的停滞控制。

3　海洋划界实验与分析

为考察本文算法在双边划界场景下的可计算性、结果线差异和计算代价,采用Visual Studio 2019在C#语言环境下实现算法,并依托划界支持系统与距离等比例线法[4]、椭球面弹性圆算法[17]开展对比实验。椭球面弹性圆算法和本文算法均按§1.1.1所述离散基点集合计算$d_A(P)$、

$d_B(P)$,接受暂停点时采用比例约束残差V_{AB}的阈值为10 m,采用统一弧长采样的单向偏距评价整体几何偏差。实验平台配置为AMD Ryzen 9 7945HX处理器(主频2.5 GHz)和32 GB内存。

3.1 实验设置与参数

为保证实验参数可追溯,将影响候选点生成、比例约束判断和误差圆有界搜索的主要参数集中列于表1。除特别说明外,各组实验采用相同的软件、硬件、边界数据和停止判据。

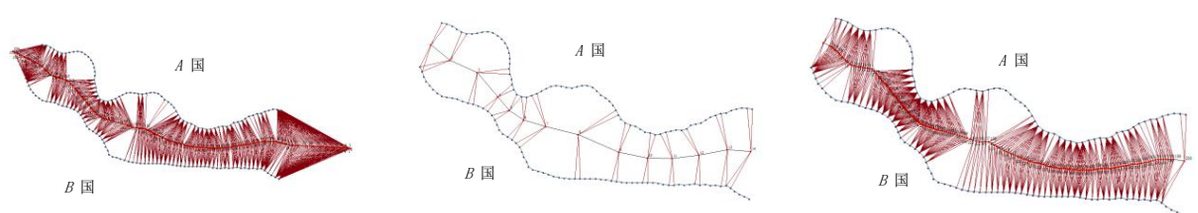
表1 实验设置与参数

Table 1 Experimental Settings and Parameters

类别	参数	本文设置	选择依据及实现说明
比例约束	距离比例系数k	0.5	除非对称场景下实验,统一采用中间线情境
弹性椭圆	压缩比q	4(敏感性实验中为1、2、3、4、6、8)	q=4仅用于固定压缩比下的算法对比,不作为普适最优值
比例约束	比例约束残差阈值ε	10 m	用于判断双边划界比例约束是否达标
正反算迭代	内部收敛阈值m_{error}	1×10^{-10} m	用于内部迭代变量,不等同于最终大地主题正反算距离误差
椭圆搜索	扫描范围、采样角步长	180°、1°	沿自适应主轴方向进行定向半圆搜索
误差圆搜索	扫描范围、采样角步长	360°、1°	对误差圆进行全周候选搜索
误差圆搜索	最大搜索层数	20	限制启发式局部搜索深度
误差圆搜索	最大试探半径、最小残差改进量	1×10^4 m、0.1 m	防止停滞时无界迭代
外层迭代	终止条件	$\lvert V_{AB}\rvert\leqslant\varepsilon$,或达到限制条件	终止时保留历史最优候选点
比较线	缓冲步距	1×10^4 m	距离等比例线法结果作为基准线时的具体步距
模拟数据	边界点数量及点间距	A侧63点、B侧64点,相邻点20 n mile	完整边界坐标、比较线坐标作为补充材料提供

3.2 弹性椭圆与传统弹性圆的效能对比

鉴于真实划界数据具有敏感性,实验使用划界支持系统模拟生成A国和B国基点,相邻基点间隔设为20 n mile(1 n mile= 1 852 m),两侧基点数量分别为63个和64个。采用距离比例系数k=1/2的中间线模拟实际双边划界场景,弹性椭圆算法选用长短半轴比为4:1的辅助椭圆,用于保持实验口径一致。不同方法生成的划界结果线如图8所示。与暂停点以红色实线相连的是本文算法计算比例残差函数所关联的双边界线基点。



(a)距离等比例线法 (b)弹性圆算法 (c)本文算法

图8 不同算法生成的划界结果线

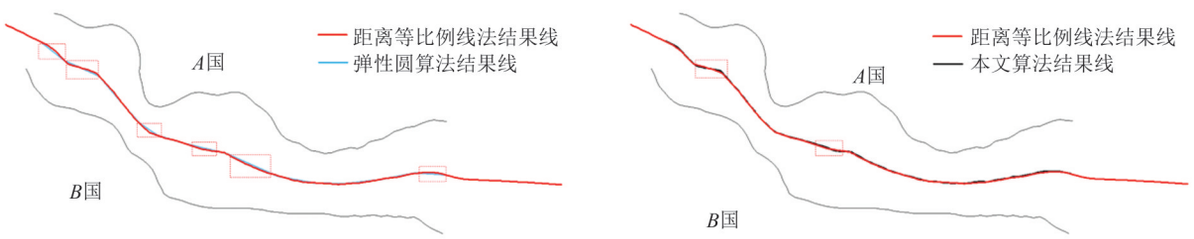
Fig. 8 Boundary Lines Generated Using Different Algorithms

距离等比例线法按双侧距离比约束生成界线是业内公认的通用方法。本文以距离等比例线作为比较线,分别叠置弹性圆算法、弹性椭圆算法的计算结果,以分析本文算法和传统算法同公认算法的相对差异,如图9所示。图9中红色虚线框标示存在明显差异的局部区段。

进一步量化比较不同输出结果时,本文将现有统计分为比较线相对偏距、弦段相对偏差和运行记录3类。表2的偏距为对生成界线按统一弧长方式离散采样,计算各采样点到比较线的最近距离,即单向离散偏距,并计算其均值、均方根(root mean square,RMS)、95%分位数和最大值;表3保留原有弦段的相对偏差记录;表4给出了各方法现有运行的暂停点数量和总耗时。

实验结果表明:(1)适用性方面,图8显示3种算法均能在本模拟场景下生成连续的结果线,本文算法能够完成从首暂停点到末暂停点的迭代。(2)相对偏距方面,由图9目视解译可知,弹性圆算法与距离等比例线法叠置时差异性相对于

传统算法更小。由表 2 可知,对于平均偏距、RMS 偏距、95% 分位偏距和最大偏距,弹性圆算法分别为 3 235.58 m、4 125.28 m、8 328.98 m 和 9 938.30 m,本文算法分别为 2 044.13 m、2 365.60 m、4 425.05 m 和 7 993.36 m,与弹性圆算法相比,本文算法的平均偏距和最大偏距分别降低 36.82% 和 19.57%。在当前统计方向和实验数据下,本文算法相对于弹性圆算法表现出较小的相对偏距。(3)折线离散性方面,由表 3 可知,弹性圆算法生成 13 个弦段,最大弦偏差和平均弦偏差分别为 9 999.70 m、5 843.35 m,本文算法生成 199 个弦段,最大弦偏差和平均弦偏差分别为 7 899.19 m 和 2 190.53 m,其中平均弦偏差降低 62.51%。这说明增加暂停点能够改善连续目标轨迹的折线离散性。(4)计算代价方面,由表 4 可知,距离等比例线法、弹性圆算法和本文算法每生成 1 个暂停点的平均耗时分别为 25.21 s、0.97 s 和 0.80 s,可见本文算法在当前实验条件下相对于距离等比例线法具有更高的计算效率和更少的单点计算耗时。



(a)距离等比例线法和弹性圆算法划界结果叠置　　(b)距离等比例线法和本文算法划界结果叠置

图 9　弹性圆算法和弹性椭圆算法相对于距离等比例线法的叠置结果

Fig. 9　Overlay Results of Elastic Circle and Elastic Ellipse Methods Relative to Distance-Ratio Line Method

表 2　不同算法生成界线相对比较线的单向离散偏距/m

Table 2　One-Way Discrete Offsets of Generated Delimitation Lines Relative to the Comparison Line of Different Algorithms/m

界线生成算法	平均偏距	RMS 偏距	95% 分位偏距	最大偏距
弹性圆算法	3 235.58	4 125.28	8 328.98	9 938.30
本文算法	2 044.13	2 365.60	4 425.05	7 993.36

表 3　现有比较线下的弦段相对偏差

Table 3　Recorded Chord-Segment Deviations Relative to the Comparison Line

界线生成算法	弦段数量/个	最大弦偏差/m	平均弦偏差/m
弹性圆算法	13	9 999.70	5 843.35
本文算法	199	7 899.19	2 190.53

表 4　不同算法的生成暂停点数量和计算耗时比较

Table 4　Comparison of Pause-Point Numbers and Total Runtime for Different Algorithms

界线生成算法	生成暂停点数量/个	计算耗时/s
距离等比例线法	254	6 404.53
弹性圆算法	14	13.59
本文算法	200	160.82

3.3　弹性椭圆与缩小弹性圆的消融对比

为检验弹性椭圆形状本身的作用,构造缩小弹性圆作为消融基线。两种算法均以当前弹性圆半径 r_i 为尺度基准:缩小弹性圆半径取 r_i/q,弹性椭圆长、短半轴分别取 $a=r_i$ 和 $b=r_i/q$;两者采用相同的比例系数 $k=1/2$、采样角步长、误差阈值、主轴方向、半圆定向扫描和误差圆启发式搜索终止条件,仅改变候选搜索域的形状。实验选取 $q=1$、2、4、8,结果见表 5。

表 5　缩小弹性圆与弹性椭圆相对比较线的偏距对比/m

Table 5　Offset Comparison of Reduced Elastic Circle and Elastic Ellipse Relative to the Comparison Line/m

q	搜索算法	平均偏距	RMS 偏距	95% 分位偏距	最大偏距
1	缩小弹性圆	3 235.58	4 125.28	8 328.98	9 938.30
	弹性椭圆	3 235.58	4 125.28	8 328.98	9 938.30
2	缩小弹性圆	1 977.24	2 272.79	4 154.95	6 877.43
	弹性椭圆	1 897.83	2 181.69	3 879.60	6 835.45
4	缩小弹性圆	2 074.05	2 390.69	4 448.72	7 977.65
	弹性椭圆	2 044.13	2 365.60	4 425.05	7 993.36
8	缩小弹性圆	2 121.77	2 467.11	4 542.53	8 643.36
	弹性椭圆	2 120.61	2 465.18	4 531.94	8 602.56

表 5 结果显示,当 $q=1$ 时,在本消融设置中缩小弹性圆与弹性椭圆的候选轨迹均退化为同一圆,4 项偏距统计一致;当 $q=2$ 时,弹性椭圆相对于缩小弹性圆的平均偏距、RMS 偏距、95% 分位偏距和最大偏距分别降低 4.02%、4.01%、6.63% 和 0.61%;当 $q=4$ 时,前 3 项分别降低 1.44%、1.05% 和 0.53%,但最大偏距增加

0.20%;当q=8时,4项偏距指标的降幅均小于0.5%。因此,结合§2.1的公式验证和§2.2的方向定义,弹性椭圆与半径r_i/q的缩小圆在规则走廊中的典型推进尺度均受短半轴或半径r_i/q控制,其主要结构差异在于椭圆沿长轴保留了更大的横向候选覆盖,实验结果说明弹性椭圆法相较缩小圆形具备良好的几何基础,但效果较为有限且具有场景依赖性。

3.4 弹性椭圆压缩比的敏感性分析

验证压缩比q对暂停点数量、相对偏距及总耗时之间的经验关系,固定弹性椭圆其他参数,选取q=1、2、3、4、6、8进行敏感性实验,结果见表6、图10~12。所有实验均采用相同的暂停点比例约束残差阈值10 m。

表6 弹性椭圆压缩比敏感性实验结果

Table 6 Sensitivity-Experiment Results for Elastic Ellipse Compression Ratio

q	暂停点数量/个	计算耗时/s	平均偏距/m	RMS偏距/m	95%分位偏距/m	最大偏距/m
1	14	19.80	3 235.58	4 125.28	8 328.98	9 938.30
2	51	54.39	1 897.83	2 181.69	3 879.60	6 835.45
3	113	103.10	2 018.16	2 340.66	4 225.74	8 993.68
4	200	160.82	2 044.13	2 365.60	4 425.05	7 993.36
6	453	346.14	2 116.27	2 454.77	4 539.07	8 240.00
8	808	576.96	2 120.61	2 465.18	4 531.94	8 602.56

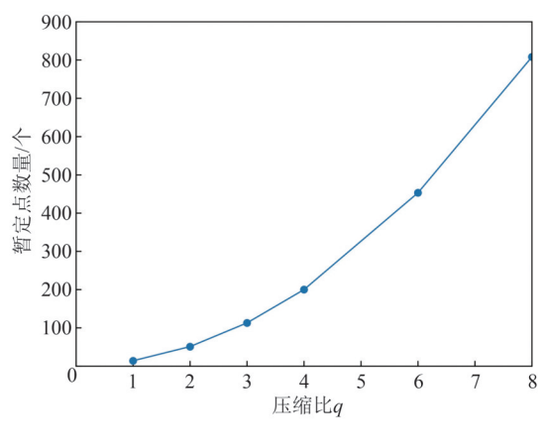


图10 不同压缩比下弹性椭圆的暂停点数量变化曲线

Fig. 10 Iteration Centers of Elastic Ellipse Under Different Compression Ratios

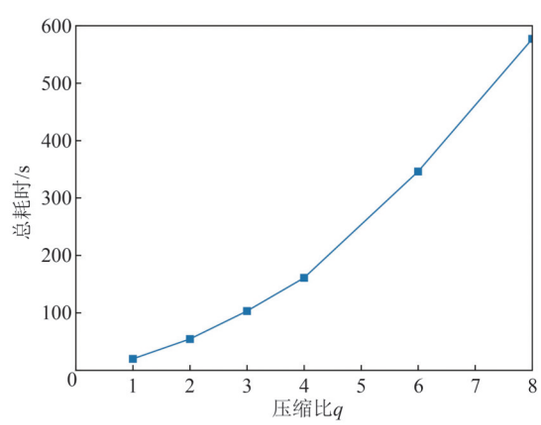


图11 不同压缩比下弹性椭圆的总耗时变化曲线

Fig. 11 Total Runtime of Elastic Ellipse Under Different Compression Ratios

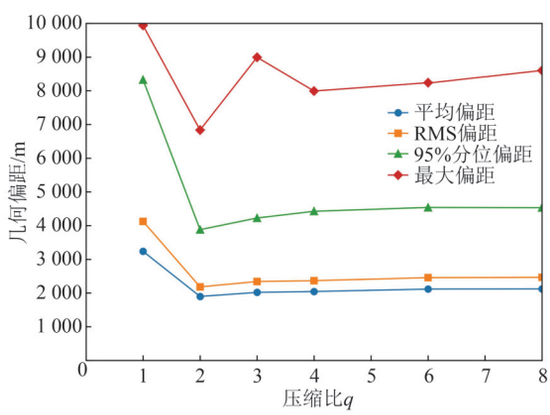


图12 弹性椭圆几何偏距随压缩比的变化图

Fig. 12 Variation of the Geometric Offset of Elastic Ellipse with the Compression Ratio

实验结果表明:(1)由图10、图11可知,随着q由1增大到8,暂停点数量由14个增加到808个,计算耗时由19.80 s增加到576.96 s,两者呈稳定增加趋势,且高压缩比区间的增长更快,压缩比q值能够调控折线离散密度与计算耗时。(2)由表6、图12可知,几何偏距在q=2时取得本组实验的最小值,此时平均偏距、RMS偏距、95%分位偏距和最大偏距分别为1 897.83 m、2 181.69 m、3 879.60 m、6 835.45 m;继续增大q后,各项指标总体呈平台状或轻微回升。由此可见,压缩比q值并非单调精度增益参数,过多的暂停点也并不一定能降低相对偏距。在本文实验划界场景下,q=2在几何偏距与计算代价之间表现出较好的折中。

3.5 不同划界场景下弹性椭圆算法适用性分析

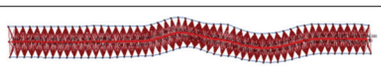
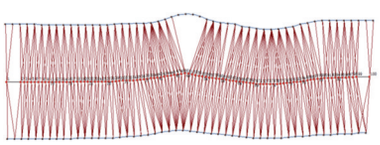
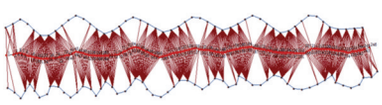
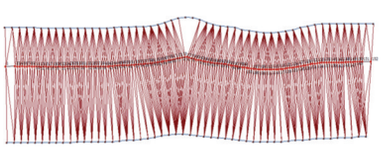
为避免将单一模拟边界下的结果外推到所有海洋划界场景,采用控制变量法构造4类模拟输入,目的限定为检查程序在不同边界几何条件

下能否产生结果输出。S_1为界线近似平行且点间距均匀的规则场景,S_2为在总体走向基本保持不变的条件下增大两侧边界间距的宽阔海域场景,S_3为含局部高曲率、凹形或锯齿变化的复杂离散边界场景,S_4为非对称距离比例场景,取$k=1/3$,双边界线形态沿用场景S_2。各场景均控制误差阈值、角度步长和弹性椭圆压缩比等参数与表1中相同。运行终止状态区分为3类:(1)正常运行,指外层迭代进入预先规定的末端空间范围,且过程中每个暂停点满足$V_{AB}\leqslant 10$ m。(2)残差超限,指局部搜索达到最大层数、最大试探半径或最小改进量等限制后仍有候选暂停点$V_{AB}>10$ m。(3)异常终止,指尚未进入规定末端范围即因程序异常或几何搜索无法继续而停止。

表7实验结果表明:(1)算法在规则边界、宽阔海域、复杂边界和非对称比例场景下均达到正常运行状态,说明其在本实验设置下能够完成多划界场景、非对称划界条件下的划界线生成,具备良好适用性。(2)不同场景的暂停点数量和耗时存在差异,反映出算法划界效果、运行代价受划界尺度、界线形态及比例系数等因素的共同影响。

表7　4种不同模拟场景下的运行记录

Table 7　Run Records for Four Simulated Scenarios

场景	输出结果	暂停点数量/个	总耗时/s	运行终止状态
S_1:规则边界,$k=1/2$		390	282.03	正常运行
S_2:宽阔海域,$k=1/2$		100	70.55	正常运行
S_3:复杂边界,$k=1/2$		246	196.89	正常运行
S_4:非对称距离比例场景,$k=1/3$		152	123.60	正常运行

4　结　语

本文以参考椭球面双边海洋划界的自动化生成为研究对象,针对离散双边条件下传统算法可能出现的暂停点密度不足、候选搜索方向不明确及局部搜索代价增加等问题,提出自适应弹性椭圆海洋划界算法。该算法采用当前最短大地距离确定长轴尺度,以压缩比控制短轴,根据两侧关联最近基点连线更新长轴方向,并在距离差超限时通过误差圆启发式局部搜索候选暂停点。

实验结果表明,在当前实验条件下,本文算法相对于传统弹性圆算法降低了相对偏距和折线离散性,其单点计算效率相对于距离等比例线法提高明显。此外,本文算法为其降低偏距提供了几何基础,存在几何偏距与计算代价之间的较好折中,且具备良好的多场景适用性。此算法能为参考椭球面上的双边划界问题提供一种可调控的自动化计算方法,具备一定的工程应用价值。

但仍需指出的是,受实验数据和应用场景限制,实验数据主要由划界支持系统模拟生成,该算法在复杂界线真实场景下的算法鲁棒性仍待检验。此外,此算法尚未实现候选点到连续边界折线的严格最短距离求解。后续研究将结合真实海洋边界数据,进一步扩大边界间距、曲率、拓扑结构和比例系数的测试范围,完善多部件边界及含岛屿场景下的异常处理与稳定性评价,并研究候选点到连续大地线段的垂足求解方法,以提高算法的可复核性、数理严谨性和工程适用性。

参　考　文　献

[1] United Nations. United Nations Convention on the Law of the Sea of 10 December 1982[EB/OL]. (1982-10-10)[2026-08-01]. https://www.un.org/depts/los/convention_agreements/texts/unclos/unclos_e.pdf.

[2] International Hydrographic Organization, Interna-

tional Association of Geodesy. A Manual on Technical Aspects of the United Nations Convention on the Law of the Sea: 1982 (TALOS): C-51[R]. Monaco: International Hydrographic Organization, 2020.

[3] CARRERA G. A Method for the Delimitation of an Equidistant Boundary Between Coastal States on the Surface of a Geodetic Ellipsoid[J]. *International Hydrographic Review*, 1987, 64(1): 147-159.

[4] 董箭, 彭认灿, 张立华, 等. 海洋划界技术研究[M]. 北京: 测绘出版社, 2023.
DONG Jian, PENG Rencan, ZHANG Lihua, et al. Research on the Technology of Maritime Delimitation[M]. Beijing: Sino Maps Press, 2023.

[5] CHRISTENSEN A H J. A Global Method for the Delineation of Maritime Boundaries[J]. *The Hydrographic Journal*, 1998, 89: 3-6.

[6] CHRISTENSEN A H J. The Revival of a Victorian Art: Waterlining with a Computer[J]. *The Cartographic Journal*, 1999, 36(1): 31-41.

[7] CHRISTENSEN A H J. A Fully Automated Sea Boundary Delineator[C]//FIG 22nd International Congress, Washington D C, USA, 2002.

[8] FERRERO S, PIEROZZI M, REPETTI L, et al. An Algorithm for the Unambiguous Determination of the Equidistant Boundary Line Between Two (or More) Coastlines[J]. *Applied Geomatics*, 2009, 1(3): 49-58.

[9] KASTRISIOS C, TSOULOS L. A Cohesive Methodology for the Delimitation of Maritime Zones and Boundaries[J]. *Ocean & Coastal Management*, 2016, 130: 188-195.

[10] KASTRISIOS C, TSOULOS L. Voronoi Tessellation on the Ellipsoidal Earth for Vector Data[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2018, 32(8): 1541-1557.

[11] KARNEY C F F. Algorithms for Geodesics[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(1): 43-55.

[12] 元哲起. 海洋划界等比率线方法[J]. 海洋通报, 1991, 10(5): 82-86.
YUAN Zheqi. Proportional Line Method of Delimitationof Maritime [J]. *Marine Science Bulletin*, 1991, 10(5): 82-86.

[13] 沈文周, 许坚, 彭认灿. 划界辅助决策系统[J]. 测绘通报, 2000(1): 21-22.
SHEN Wenzhou, XU Jian, PENG Rencan. An Accessory Policy-Making System for Boundary Delimitation[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2000(1): 21-22.

[14] 梁德清, 许坚, 梁开龙, 等. 椭球面划界技术中海域界线的生成算法研究[J]. 测绘工程, 2002, 11(3): 22-24.
LIANG Deqing, XU Jian, LIANG Kailong, et al. Study on Algorithm of Drawing Maritime Limit in the Technology of Delimitation of Maritime Boundary Based on the Ellipsoid[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2002, 11(3): 22-24.

[15] 彭认灿,董箭,陈轶,等. 高精度距离等比例线法海洋划界模型研究[J]. 海洋测绘,2009,29(4):14-18.
PENG Rencan, DONG Jian, CHEN Yi, et al. Research on Maritime Delimitation Model of High Accuracy Equiratio Method[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2009, 29(4): 14-18.

[16] 董箭, 彭认灿,陈轶, 等. 一种基于缓冲区边界相向逼近求交模型的曲线间中心线生成算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2011,36(9):1120-1123.
DONG Jian, PENG Rencan, CHEN Yi, et al. A Centerline Generation Algorithm Between Curves Based on an Opposing Buffer-Boundary Approximation-and-Intersection Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(9): 1120-1123.

[17] 刘俊男, 董箭, 王文韬. 一种水线法和弹性圆法相结合的海洋划界优化方法[J]. 中国水运, 2022, 22(20): 151-153.
LIU Junnan, DONG Jian, WANG Wentao. An Optimization Method of Maritime Delimitation Combining Waterline Method and Elastic Circle Method [J]. *China Water Transport*, 2022, 22(20): 151-153.

[18] 张建辉, 张学峰, 肖利, 等. 等距离海洋划界模型研究[J]. 海洋湖沼通报, 2022, 44(4): 1-9.
ZHANG Jianhui, ZHANG Xuefeng, XIAO Li, et al. Research on Equidistant Maritime Delimitation Model[J]. *Transactions of Oceanology and Limnology*, 2022, 44(4): 1-9.

[19] ZHANG J H, CHEN S Y, NING P F, et al. An Equidistance/Equiratio Method of Maritime Delimitation on the Earth Ellipsoid[J]. *Journal of Sea Research*, 2023, 191: 102322.

[20] ZHANG J H, FU R Q, CUI Y J, et al. A New Method for Generating Equidistant/Equiratio Line Between Two Points on the Earth Ellipsoid [J]. *Computers & Geosciences*, 2024, 188: 105598.

[21] XIE T, DONG J, TANG L L, et al. Method for Delineating the Formula Limit of the Continental Shelf Under the Maximum Area Principle Constraint [J]. *Journal of Marine Science and Engineering*, 2024, 12(6): 949.

[22] TAI T H, QIU W X. Assessing the Impact of Sea Level Rise on Maritime Entitlement and Delimitation: An Interdisciplinary Investigation Through Legal and Technical Analysis[J]. *Frontiers in Marine Science*, 2024, 11: 1448292.